

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ ЛІЦЕЙ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
ХАРКІВСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ

Шляхи подальшого розвитку творчої ініціативи

Третьякова А.І., вчитель математики

Харків - 2007

Зміст

1. Шляхи розвитку творчої ініціативи
вчителя.....4
2. Самостійна робота учнів – необхідна
складова навчального
процесу.....7
3. Урок-лекція з алгебри в 10 класі.
«Висловлення та операції над
ними».....15
4. Прикладна спрямованість уроків
математики: арифметична та
геометрична прогресія. Збірник
прикладних задач.....27

Шляхи подальшого розвитку творчої ініціативи

Моє життя – це дві дуже значимі любові: сім'я та робота. Моя сім'я – діти, чоловік, мама, їх здоров'я, успіхи, спокій, злагода між ними найміцніший фундамент успішної роботи. І якщо все надійно в сім'ї, то на роботу йду з великим задоволенням, ще в ліжку прокручую день, акцентую свою увагу на проблемах. Буває спливе в голові тема уроку, особливо якщо матеріал важкий для учнів, ще раз подумаю з чого краще почати розповідати.



Якщо сімейні негаразди заповняють всі думки, стараюсь діяти за принципом: все, що можна було зробити, зробила, а зараз час на роботу. І моє самопочуття не повинно відображатися на людях, хоча другий раз не завжди вдається зберегти спокій, оптимістичний настрій.

Головний показник в роботі – це робота всіх учнів на уроці. Тому і головна моя задача старатися дійти до кожного. До нового ставлюся з обережністю, бо приходить експериментувати

на дітях і згаяний час не вернеш, більше довіряю досвідченим психологам, вчителям. Розумію, що робота вчителя, це насамперед, робота його душі і серця і одні і ті ж педагогічні технології одному вдаються, а другому ні. В нього є що своє.

Ще десь 10 років тому працювала над темою: блочне подання матеріалу, включаючи лекції та семінарські заняття. Семінарські заняття проводилися з групами різного складу, в процесі засвоєння матеріалу, склад груп змінювався. Розробляла методичну підтримку груп та окремим учням чи це картки-підказки або алгоритми розв'язку тощо.

З часом, коли рівень пізнавальної активності почав спадати, задумалась над посиленням мотивації на уроці. В сучасному практичному житті домінуючим фактором в цьому напрямі є прикладна спрямованість уроків математики. Знаходити математику в оточуючому нас світі. Максимально наблизити теорію до практики повсякденного життя, шукати яскраві прилади застосування набутих знань.

Всі факти, що цікавлять мене, виписую або занотовую, де, в якій книзі чи журналі є такі приклади.

Стараюсь не відставати від життя і розумію, що не можна відсторонитися від факту впливової сили комп'ютера в суспільстві.

Комп'ютер стає універсальним помічником людини в цивілізованому світі. Використання його в навколишньому процесі допомагає у вирішенні

Розв'язання:

Цінність кожного призу зменшувалася на одну і ту ж саму суму тому маємо арифметичну прогресію:

$$a_1 = 150 \quad a_n = 30 \quad n - \text{кількість призів.}$$

$$\text{Призовий фонд } 360 \text{ грн., отже } S_n = 360 \text{ грн.}$$

Формула суми n – перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$$

$$360 = (150 + 30) \cdot n / 2$$

$$360 = 90n$$

$n = 4$ – загальна кількість призів і кількість арифметичної прогресії.

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$30 = 150 + 3d$$

$$3d = -120$$

$d = -40$ – сума на яку зменшувалась цінність призів.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_2 = 150 - 40 = 110;$$

$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_3 = 110 - 40 = 70$$

Отже, загальна кількість призів – 4 і розподілилися вони так 150, 110, 70, 30.

Відповідь: 4; 150 грн., 110 грн., 70 грн. і 30 грн.

Задача 6. Студент узяв з бібліотеки книгу в 400 сторінок. У перший день прочитав 60 сторінок, а в кожний наступний день прочитав на 10 сторінок більше, ніж у попередній. Через скільки днів він прочитає всю книгу?

Розв'язання:

Оскільки студент читав кожного дня на 10 сторінок більше, то кількість прочитаних сторінок за кожен день утворюють арифметичну прогресію.

$$a_1 = 60 \quad d = 10$$

$$S_n = 2a_1 + (n - 1)d \cdot n/2$$

$$400 = 2 \cdot 60 + (n - 1) 10 \cdot n/2$$

$$400 = (120 + 10n - 10) \cdot n$$

$$800 = 120n + 10n^2 - 10n$$

$$110n + 10n^2 - 10n = 0 \quad / : 10$$

$$n^2 + 11n - 80 = 0$$

$$n_1 + n_2 = -11$$

$n_1 n_2 = -80$ ($n_1 = 5$ або $n_2 = -16$ – не є натуральним числом)

Отже, за 5 днів студент прочитає всю книгу.

Відповідь: 5 днів.

Задача 7. На стрілецькі змагання призначили кілька призів. Найбільший з них 150 грн., а цінність кожного дальшого зменшується на одну і ту ж суму до найменшого, який дорівнює 30 грн. Загальна цінність призів 360 грн. Скільки всього призначено призів і яка їх цінність?

дидактичних завдань та активізує дію мотиваційних чинників у створенні позитивного ставлення до навчання. На сьогоднішній день існують такі програмні засоби, орієнтовані на використання під час вивчення математики: DERIVE, EUREKA, GRANI, Maple, MathCAP, GRAN – 2P, Mathematica, MathLab, Maxima, Numert, Reduce та інші. Указані програмні засоби призначені насамперед для розв'язування задач шляхом моделювання об'єктів, що фігурують в умові задачі, дозволяють поєднати високі моделюючі та обчислювальні можливості з унаочненням результатів під час дослідження різних математичних об'єктів на всіх етапах процесу навчання.

Деякі з цих програм я дістала у своїх знайомих, залишилося продовжити пошук та освоїти їх застосування.

До дітей стараюсь відноситися як до особистостей, враховуючи їх власний внутрішній стан, ставлення до оточуючого середовища, але не змішую відношення і оцінювання їх навчальних



досягнень, яке провожу згідно з критеріями оцінювання. Так, учениця 8 класу Жук Тетяна має дуже слабкі

знання з математики, але це не заважає мені спілкуватися з дівчиною, пізнавати багато цікавого з її позашкільного життя, відкривати для себе її внутрішній світ. В атмосфері доброзичливого, зацікавленого ставлення до дівчинки краще розкриваються причини неуспішності в математиці та існує можливість правильного корегування цим процесом. Але я також розумію, що оцінка це не головне. Головне, щоб дівчині було комфортно на уроці і їй самій хотілося досягнути більш значимого результату.

Дуже люблю природу, активний відпочинокдесь в лісі на галявині та щоб ще якесь озерце було поблизу. Виїжджаємо всією сім'єю або з друзями. Граємо в волейбол, футбол, є можливість – купаємося.

Люблю подорожувати.

Приємно провести вечір в театрі. Знаю майже весь репертуар театру ім. Пушкіна. Улюблені актори Васильєв, Кубанцев, Сидоренко, з інтересом слідкую за виконанням ролей молодих талановитих акторів. З задоволенням відвідую ХАТОБ.

Всюди в кімнатах в моєму домі ростуть квіти. Їх навіть забагато. Серед них декілька видів пальм, фіалок, розкішний фікус, роза, кротон, сансев'єра, маранта та багато інших. Розводжу, дарую друзям, роздаю добрим знайомим.

Мені хотілося б все-таки освоїти комп'ютерні програми і знайти їх якомога більше.

$\frac{x}{1-250}$ величина, яка показує в скільки разів змінюється кількість спирту тому після третього разу.

$$b_3 = b_1 \frac{0.8(1250-x)^2}{1250}$$

b_1, b_2, b_3 – члени геометричної прогресії

За умовою $b_3 = 125$ л

$$0.8 \cdot (1250-x) \left(1 - \frac{x}{1250}\right) = 125$$

$$((0.8 \cdot (1250 - x)) / (25 \cdot 10))^3 = 5^3$$

$$(1250 - x) / 125 = 5$$

$$1250 - x = 625$$

$$x = 625(\text{л}).$$

Перевіримо

| | Кислота | Вода |
|-----|---------|--------------|
| | 1000 | 250 |
| I | 500 | 125+625=750л |
| II | 250 | 375л |
| III | 125 | 1125л |

Отже, треба було відправити 625 л розчину і доливати 625 л води.

Відповідь: 625л.

результаті в посудині залишилося 125 л чистої кислоти. Яку кількість розчину брали з посудини кожного разу?

Розв'язання :

Маємо 1250л 80% розчину кислоти, тобто $1250 \cdot 0,8 = 1000$ л кислоти та

250 л води.

Нехай $x_{\text{л}}$ будемо виливати рідину і $x_{\text{л}}$ води доливати тоді після першого разу $(1250-x)$ л розчину залишилося в ньому кислоти $0,8 \cdot (1250-x)$ л, води $0,2(1250-x)$ л, далі доливаємо $x_{\text{л}}$ води. Отже, води в розчині буде

$(0,2 \cdot (1250-x) + x)$ літрів, $b_1 = 0,8(1250-x)$.

Змінилося процентне відношення

$$\frac{0,8(1250-x)}{1250} \cdot 100\% = 0,8 \frac{x}{1-1250} \cdot 100\% \text{ в різні}$$
 кислоти.

Після другого разу : $(1250-x) \cdot 0,8 \cdot (1250-x)$ л ,

кислоти в новому розчині

$$\frac{0,8(1250-x)^2}{1250} = 0,8 \cdot (1250-x) \cdot \left(\frac{1250-x}{1250} \right) = 0$$

$$b_2 = b_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{1250} \right)$$

Продовжити пошук цікавих прикладних задач з математики з подальшим написанням роботи для участі в МАН.

Самостійна робота учнів – необхідна складова навчального процесу.

Виконання першочергових завдань, що впливають з передумов входження України до єдиного європейського освітнього простору, реалізація положень Болонської декларації в системі Міністерства освіти і науки України, а також упровадження нових освітніх стандартів вимагають інтенсифікації навчального процесу та підвищення якості навчання. Останнім часом здійснюються активні пошуки нових педагогічних технологій підготовки майбутнього спеціаліста, що зорієнтовані на формування особистості, розвиток її творчості й самостійності.

Важлива роль у цьому складному процесі належить самостійній роботі учнів (СРУ) як складовій навчального процесу.

Як свідчить аналіз спеціальної літератури, тлумачення сутності самостійної роботи, її мети залежить у першу чергу від загальної концепції навчального процесу. Складність вивчення проблеми зумовлена відсутністю в дидактиці єдності думки стосовно того, що являє собою самостійна робота – метод навчання, прийом учіння чи форму організації навчальної діяльності учнів.

Якщо вбачати сутність навчання в переданні системи знань і способів діяльності, то самостійну роботу можна вважати засобом закріплення та тренування, вироблення вмінь і навичок.

Одночасно, оскільки навчання розглядається як формування пізнавальної діяльності, то самостійна робота виступає способом розвитку творчих здібностей та професійного мислення.

Виходячи із сучасного розуміння навчання як процесу управління формуванням особистості, тлумачення СРУ є не чим іншим як способом формування самостійності та активності особистості, її репродуктивних і творчих здібностей, уміння орієнтуватись у теорії та практичних ситуаціях, ставити та самостійно вирішувати теоретичні та практичні завдання.

Аналіз наукових досліджень дозволяє виділити підходи до визначення поняття «самостійна робота» в основі яких лежать різні ознаки.

Самостійну роботу прийнято вважати:

- роботу, яка виконується власними силами без сторонньої допомоги та керівництва, під час аудиторських занять.

- різноманітність типів навчальних завдань, які використовуються під



прогресію, де $d = 1,6 \%$ (для води), і $d = -1,6 \%$ (для спирту).

$$x_1 = 78,4 \%; \quad y_1 = 21,6 \%.$$

$$x_{20} = 78,4 \% + (20 - 1)(-1,6)\% = 48 \%.$$

$$y_{20} = 21,6 \% + 19 \cdot 1,6 \% = 52 \%.$$

Отже, після 20 відливів спирт буде становить $-0,48 \cdot 50 = 24$ л.

Відповідь: 24л.

Задача 5. Посудина має 1250л 80 % розчину кислоти. З нього тричі відливали деяку кількість розчину, доливаючи таку ж кількість води. В результаті в посудині залишилося 125 л чистої кислоти. Яку кількість розчину брали з посудини кожного разу.

Задача 6. Проектуючи водопостачання села, необхідно розрахувати приблизну витрату води. Нехай добова витрата води на одного жителя становить a літрів, M – кількість жителів села, а річний приріст населення становить $p\%$. Скільки води потрібно буде селу через k років?

Через рік витрати води становитимуть $aM + p/(100\%) \cdot aM = aM(1 + p/100)$ (л).

Через k років селу потрібно буде $aM(1 + p/100)^k$ (л) води.

Задача 5. Посудина має 1250 л 80 % розчину кислоти. З нього тричі відливали деяку кількість розчину, доливаючи таку ж кількість води. В

Так як у не може дорівнювати нулю, то ми можемо обидві частини рівності скоротити на цей множник. Отримуємо:

$$31 = 63 - 2y \text{ і } y = 16$$

Звідки

$$x = 31y = 496$$

Отже, заготовлено було 496 декалітрів корму на 16 тижнів.

Відповідь: 496 дл. 16 тижнів.

Задача 4. Скільки літрів чистого спирту залишилося в посудині, якщо із 50 л 80% його розчину 20 раз відливали по 1л розчину, кожного разу доливаючи 1 л води?

Розв'язання:

80 % від 50л розчину становить:

$$0,8 \cdot 50 = 40,0$$

Відповідно води 10л.

Після першого відлива розчину буде 49 л, з яких 80 % спирту:

$$49 \cdot 0,8 = 39,2\text{л, а води - } 49 \cdot 0,2 = 9,8\text{л.}$$

Потім додаємо літр води, після чого спирту в розчині буде:

$$39,2 \cdot 100 / 50 = 78,4 \%$$

Відповідно води – 21,6 %.

Повторюючи операцію ще раз отримуємо, що спирту в нас буде 76,8 % від розчину, а води – 23,2 %.

Бачимо, що відсотковий вміст води та спирту в розчині становить арифметичну

керівництвом викладача.

- систему організації педагогічних умов, яка забезпечує управління навчальною діяльністю і відбувається за відсутності викладача й без його безпосередньої допомоги та участі.

- різноманітні види індивідуальної, групової пізнавальної діяльності учнів, які здійснюються ними на аудиторних заняттях і в позааудиторний час.

- обов'язкову роботу, яка проводиться у процесі навчальних занять і підготовки до них, або ж додаткову – позообов'язкову академічну роботу чи за спеціальним індивідуальним планом, складеним на основі врахувань особистих інтересів і нахилів учнів.

Самостійна робота – це спеціально організована діяльність учнів з урахуванням їх індивідуальних особливостей, спрямована на самостійне виконання навчальних завдань різних рівнів складності як на аудиторних заняттях, так і в позааудиторний час. Метою СРУ є її спрямування на виконання соціального замовлення, тобто у формуванні в учнів уміння самостійно поповнювати свої знання, орієнтуватись у потоці наукової інформації.

- СРУ – спланована пізнавальна, організаційно й методично спрямована діяльність без прямої допомоги учителя.

Цей вид навчальної діяльності учнів умовно можна розділити на три рівні:

- 1) самостійну роботу під час основних аудиторських занять (лекцій, семінарів, лабораторних і практичних занять);
- 2) самостійну роботу під контролем учителя у формі планових консультацій, творчих контактів, заліків та іспитів;
- 3) позааудиторну самостійну роботу при виконанні учнем домашніх завдань навчального та творчого (дослідного) характеру.

СРУ буде більш ефективною, якщо являтиме собою складову навчально-виховного процесу при чіткій організації з боку навчального закладу й буде здійснюватись постійним контролем з використанням електронних технологій над СРУ з боку вчителя.

Відповідно до аудиторних цілей всі види СРУ можна підрозділити на п'ять груп:

1. Отримання нової навчальної інформації оволодіння вмінням самостійно отримувати знання з різних джерел.
2. Закріплення й уточнення знань.
3. Вироблення вмінь використовувати знання в розширенні навчальних і практичних задач.
4. Формування творчої характеру, умінь використовувати знання в ускладненій ситуації

Відповідь: 4,125 км.

Задача 3. Для 31 куриці було заготовлено деяку кількість корму з рахунку по декалітру в неділю на кожну птицю. При цьому припускається, що кількість курей не буде змінюватися. Але, через те, що в дійсності кількість курей кожен тиждень зменшувалася на 1, то заготовленого корму вистачило на подвійний термін.

Наскільки великим був запас корму і на який час він був спочатку розрахований?

Розв'язання:

Нехай заготовлено було x декалітрів корму на y неділі. Так як корму було розраховано на 31 курицю по 1 декалітру на курицю в неділю, то

$$x = 31y$$

В перший тиждень було витрачено 31 дл, в другу 30, в третю 29 і т.д. до останній тиждень усього подвоєного терміну, коли витрачено було:

$$a_{2y} = 31 + (-1) \cdot (2y - 1) = (31 - 2y + 1) \text{ дл},$$

арифметична прогресія $a_1 = 31$ $d_1 = -1$

Звідси випливає, що весь запас складав

$$x = 31y = 31 + 30 + 29 + \dots + (31 - 2y + 1)$$

Сума $2y$ членів прогресії, перший член якої 31, а останній $31 - 2y + 1$, дорівнює

$$31y = ((31 + 31 - 2y + 1)2y)/2 = (63 - 2y)y$$

Наприклад, за 12 кругів він прибере зернові з площі

$$Q = 2(1200 + 200 - 25 \cdot 12) \cdot 5 \cdot 12 = 153600 = 15,4 \text{ га.}$$

$$\text{Відповідь: } 2(1 + c + 2b - 4bn)bn.$$

Задача 2. В огороді 30 грядок, кожна довжиною 16 м і шириною 2,5м. Поливаючи грядки, огородник приносить відра з криниці, розташованої в 14м від краю огорода, і обходить грядки по межі, причому кількість води, принесеної за один раз, достатньо для поливки однієї грядки. Якої довжини шлях повинен пройти огородник, поливаючи весь огорода? Шлях починається і закінчується біля криниці.

Розв'язання:

Для поливки першої грядки огородник повинен пройти шлях

$$14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65\text{м}$$

При поливці другої він проходить

$$14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14 = 65 + 5 = 70\text{м}$$

Кожна наступна грядка потребує шляху на 5 м довше попереднього

Маємо прогресію:

$$65; 70; 75; \dots; 65; + 5 \times 29$$

Сума її членів дорівнює

$$(65 + 65 + 5 \times 29)30/2 = 4125 \text{ м}$$

Отже, огородник при поливці усього огорода проходить шлях в 4,125 км.

5. Формування вмінь і навичок практичного характеру.

У педагогічній практиці використовуються різноманітні прийоми СРУ: організація роботи з навчальними матеріалами; збір (накопичення) матеріалу з досліджуваної теми; організація учнів на підготовку та написання рефератів; спрямування роботи учнів із конспектом – схемою, розробленим учителем; аналіз порівняльного й досліджувального матеріалу при написанні курсових робіт; організація виконання індивідуальних завдань; участь у роботі семінарів; отримання завдань і результатів при виконанні лабораторних і практичних завдань; розв'язання завдань за темами; участь у ділових іграх, тестуванні.

З методичної точки зору СРУ доцільно розділяти на етапи:

1) планування СРУ (при розробці робочої програми з дисципліни учитель планує кількість годин самостійного вивчення з відповідних тем, розробляє зміст і характер самостійних завдань)

2) організація самостійного вивчення має витримуватись у рамках конкретності доступності змісту самостійного навчання. Для цього на лекціях, семінарських і практичних заняттях необхідно формувати завдання для СРУ.

3) Контроль та корекція результатів СРУ при виконанні електричних тестових і контрольних завдань, на семінарських заняттях, під час

проведення поточного та підсумового контролю знань учнів, під час складання іспитів, заліків.

Тому зміст СРУ над конкретною дисципліною визначається робочою програмою з цієї дисципліни, методичними матеріалами, завданнями, які видаються на лекціях, семінарських, практичних і лабораторних заняттях, при написанні рефератів, курсових та інших видів роботи. Комплексні навчально-методичні рекомендації, методичні рекомендації з окремих тем і проблем з навчальних дисциплін передбачають завдання для СРУ, які містять у собі перелік запитань для самоконтролю, інформаційно-методичне забезпечення.

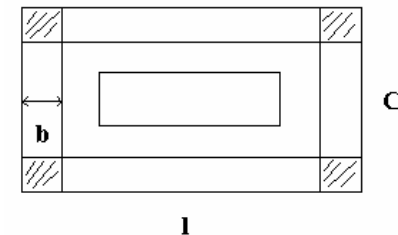
Запитання, які виникають в учнів стосовно виконання завдань, вирішуються на консультаціях, які проводяться згідно з графіками.

Методичні матеріали для СРУ передбачають:

- проведення самоконтролю з боку учня – перелік контрольних запитань з дисципліни; завдання-тести (електронні тести); збірники практичних завдань;
- проведення контролю таких форм, як постановка запитань проблем на лекціях, семінарських і лабораторних заняттях; заслуховування й обговорення рефератів, виконання письмових робіт в аудиторії, дискусії, диспути, ділові ігри, індивідуальні консультації, тестування.

Обчислити площу, оброблену комбайном, який рухається в кутову, за n – кругів.

Розв'язання:



Площа, яку обробив комбайн за перший круг:

$$Q_1 = 2lb + 2bc - 4b^2 = 2b(l + c) - 4b^2$$

За другий круг:

$$Q_2 = 2(l - 2b)b + 2(c - 2b)b - 4b^2 = 2bl - 4b^2 + 2bc - 4b^2 - 4b^2 = 2bl + 2bc - 12b^2 = 2b(l + c) - 12b^2$$

$$Q_3 = 2b(l + c) - 20b^2 = Q_1 - 16b^2,$$

За четвертий круг:

$$Q_4 = 2b(l + c) - 24b^2 \text{ і т.д.}$$

Послідовність $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ – є арифметична прогресія з першим членом Q_1 і різницею $-8b^2$.

$$d = -8b^2$$

Q – площа, оброблена комбайном за n – кругів

$$Q = (2Q_1 + d(n - 1)n)/2.$$

$$Q = (2n(2b(l + c) - 4b^2) - 8b^2(n - 1))/2 = 2(l + c + 2b - 4bn)bn.$$

Наприклад, при значеннях $l = 1200\text{м}$ і $c = 200\text{м}$ комбайн СК-5 "Нива" ($b = 5\text{м}$) може зробити не більше $200/10 = 20$ (кругів), так як $n \leq c/2b$.

Розв'язок

Відрізок, що з'єднує середини сторін трикутника – це середня лінія трикутника, яка дорівнює половині третьої. Отже, периметр другого трикутника вдвічі менший першого і т.д.

Знайдемо периметри трикутників: $P_1=3$; $P_2=1,5$; $P_3=0,75$...Периметри трикутників утворюють геометричну прогресію з $q=0,5$. Суму периметрів знаходимо за формулою:

$$S=b_1/(1-q), \text{ отже, } S=3/(1-0,5)=6.$$

Отже, сума периметрів всіх цих трикутників дорівнює 6 см.

Відповідь: 6 см.

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі. Природничі науки.

***Учениця 9-Б класу
Гайденко Ю.О.***

Задача 1. Поле має форму прямокутника, довжина якого l , ширина c , а ширина робочого захвату комбайна b .

Важливою умовою ефективності СРУ є навчально-методичне забезпечення з використанням електронних технологій. Слід відмітити, що навіть при наявності літератури, а також електронних ресурсів виникають труднощі, які пов'язані з недостатнім вмінням учнів орієнтуватись у складності навчального матеріалу, а також з організацією контролю засвоєння навчального матеріалу. У зв'язку з цим особливо актуальними стають методи управління самостійною роботою. Тому для підвищення якості підготовки випускників необхідно поряд з наданням визначених програмних відомостей більш активно здійснювати управління процесом отримання та засвоєння знань учнів у процесі СРУ. Для рішення цієї проблеми необхідні розробка та впровадження у процес навчання сучасних науково обґрунтованих і методичних посібників. При цьому навчальні посібники (як традиційні так і електронні) повинні виконувати не тільки інформаційну, а й організаційно-контролюючу та управляючу функції. Управляюча функція простежується в рубрикації, у текстовому виділенні основних абзаців навчального матеріалу, у наявності структурно-логічних схем, що виявляють взаємозв'язок навчальних матеріалів в узагальнюючих висновках. Методичні посібники повинні вказувати, в якій послідовності необхідно вивчати матеріал дисципліни, звертати увагу на особливості вивчення окремих тем і розділів,

допомагати відібрати найбільш вагомі та необхідні відомості зі змісту посібника тощо.

Відповідного до цього головна ознака СРУ не в тому, що учень займається безпосередньо без участі або допомоги викладача, а в тому, що в його діяльності поєднується функція перекладу інформації у знання, уміння та функції управління цією діяльністю.

Педагогічний досвід свідчить, що організація СРУ може здійснюватись одночасно за декількома напрямками. Наприклад, розробка приватних алгоритмів рішення типових задач, навчальних програм, індивідуалізація самотійних робіт, спеціалізація самотійної роботи з урахуванням практичних задач, а також розробка нових технологій навчання, забезпечення методичною та довідковою літературою, використання комп'ютерних технологій.

СРУ з науково-дослідною та навчальною літературою на електронних носіях зберігається як важливий компонент самотійної роботи учня в цілому, але її основу складає самотійна робота з навчальними програмами, з тестуючими системами, з базами даних.

Усі види електронних видань можуть слугувати для організації СРУ: електронні підручники, мультимедіа-курси, ресурси мережі Інтернет, електронні бази даних, електронні каталоги, фонди бібліотек, архівів тощо.

Ефективність використання засобів інформаційних технологій у СРУ залежить від

$$q=1/\sqrt{2}$$

$$S=4\pi/(1-1/2)=4\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}+1)$$

Отже, сума довжин усіх кіл дорівнює $4\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}+1)$ 4

Задача №7

На куб зі стороною a поставили куб зі стороною $a/2$, на нього куб зі стороною $a/4$, потім куб зі стороною $a/8$ і т. д. Знайти висоту фігури, що утворилася при цьому.

Розв'язок

Якщо кількість кубів збільшувати до нескінченності, то сума їх висот як завгодно близько буде наближатися до числа $2a$. $q=1/2$
 $a+a/2+a/4+a/8 \dots = 2a$. Дійсно, $S = a(1 - 1/2) = 2a$

$$S=b_1/(1-q)$$

Отже, висота фігури, що утворилася при цьому дорівнює $2a$.

Відповідь: $2a$.

Задача №8

Є рівносторонній трикутник зі стороною 1 см. Середини його сторін – вершини другого трикутника, середини сторін другого – вершини третього трикутника і т. д. Знайдіть суму периметрів всіх цих трикутників.

Розв'язок

Квадрат

$$a_1=4\text{см}$$

$$a_2=2\cdot\sqrt{2}$$

$$a_3=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$$

a_1, a_2, a_3, \dots – геометрична прогресія

$$q=\sqrt{2}/2$$

$$S_1=a_1^2=16$$

$$S_2=a_2^2=4\cdot 2=8$$

$$S_3=a_3^2=4$$

S_1, S_2, S_3, \dots – нескінченна спадна геометрична прогресія

Сума знаходиться за формулою:

$$S=b_1/(1-q), \text{ де } b_1=S_1$$

$$q=1/2$$

$$S=16/(1-1/2)=32$$

Отже, сума площ усіх квадратів дорівнює 32см^2

Відповідь: $32\text{см}^2, 4\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}+1)$

Коло

$$1. \quad 1. r_1=a/2=2$$

$$2. \quad 2. r_2=2\sqrt{2}/2=\sqrt{2}$$

$$3. \quad 3. r_3=2/2=1$$

r_1, r_2, r_3, \dots – геометрична прогресія

$$q=1/\sqrt{2}$$

$$l=2\pi r_1 \quad \pi - \text{довжина кола}$$

$$l_1=2\pi\cdot 2=4\pi$$

$$l_2=2\pi r_2=2\pi\sqrt{2}$$

$$l_3=2\pi$$

l_1, l_2, l_3, \dots – нескінченна спадна геометрична прогресія

успішного рішення задач методичного характеру пов'язаних з інформаційним змістом і способом використання автоматизованих систем навчання в навчальному процесі.

Висловлення та операції над ними.

Урок з алгебри та початків аналізу. 10 клас

Мета: формування культури логічного мислення учнів через введення поняття висловлення та логічних операцій над ними.

Тип уроку: урок вивчення нового матеріалу; урок лекція.

Хід уроку

I. Ознайомлення учнів з планом

вивчення теми

План

1. Основні форми мислення людини.

2. Висловлення як об'єкт дослідження математичної логіки.

3. Логічні операції та їх властивості.

II. Мотивація навчальної діяльності

Світ, що оточує складається з різних об'єктів – живих істот, будинків, книг, автомашин, рік і т.д. При вивченні цих об'єктів ми цікавимося деякими їх властивостями, наприклад масою, формою, розмірами, кольором, запахом і т.д. Між об'єктами, що нас оточують існують різні відношення.

Розглянемо такі твердження: «Кусок крейди лежить біля класної дошки» або «Ріс

Петрова дорівнює 186 см». Кожне таке твердження може бути як істинне так і хибне. Ріст Петрова може і не дорівнювати 186 см, а кусок крейди може лежати не біля дошки, а на задній парті або взагалі його не буде.

Багато тверджень відносяться не до окремих об'єктів, а до класів об'єктів (всі чотирикутники мають дві діагоналі; деякі мавпи живуть в зоосаді).

Об'єднання об'єктів відображає їх близькість, схожість властивостей. Класи об'єктів позначаються відповідними словами – «рослини», «савці», багатокутники.

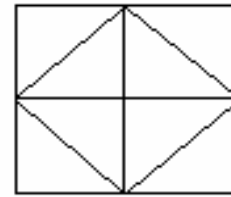
Для научного дослідження характерно використання абстрактних понять, таких, як «хімічний елемент», «маса», «енергія», «матерія», «число», «геометрична фігура» і тому подібне. Абстрактні поняття є узагальненням величезного досвіду людства, відображають коренні властивості матеріального світу. При введенні будь-яких з понять приходить відходити від багатьох властивостей реальних об'єктів (наприклад, розглядаючи фізичне тіло як геометричну фігуру, ми не звертаємо уваги на його колір, масу, густину, а тільки цікавимося формою та розмірами.

Вміння розмірковувати, правильно обґрунтовувати свої висновки необхідне людям будь-якої професії.

цих квадратів є геометричною прогресією. знайти суму площ усіх квадратів.

Розв'язок

Площа квадрата розбивається на вісім рівних трикутників, тому площа другого квадрата – це половина площі першого, і площа кожного наступного квадрата дорівнює половині площі попереднього.



Отже, послідовність площ квадратів є нескінченною геометричною спадною прогресією, перший член якої дорівнює 16, а знаменник $\frac{1}{2}$. Знайдемо суму цієї геометричної прогресії:

$$S = 16 \cdot (1 - 1/2) = 32$$

Отже, сума площ усіх квадратів дорівнює 32см^2 .

Відповідь: 32см^2

Задача №6

У квадрат зі стороною 4см вписано коло, у коло вписано квадрат, а у квадрат знову вписано коло і т. д. Знайдіть:

- а) суму площ усіх квадратів;
- б) суму довжин усіх кіл.

$n=12$, отже кладка має 12 рядів.

Запишемо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії:

$S_{12} = (1+12) \cdot 12 / 2 = 13 \cdot 6 = 78$, отже в одній кладці 78 колод.

Відповідь: 78 колод.

Задача №4

Доведіть, що послідовність сум внутрішніх кутів трикутника, опуклого чотирикутника, опуклого п'ятикутника і т. д. є арифметичною прогресією. Чому дорівнює її різниця?

Розв'язок

Формула суми внутрішніх кутів опуклого n -кутника $180 \cdot (n-2) = 180n - 360 = -360 + 180n$

Якщо: $n=3$; $a_1 = -360 + 3 \cdot 180 = 180$ (трикутник)

$n=4$; $a_2 = -$

$360 + 4 \cdot 180 = 180 + 180 = 360$ (чотирикутник)

$n=5$; $a_3 = -$

$360 + 5 \cdot 180 = 360 + 180 = 540$ (п'ятикутник)

Кожне наступне значення на 180 більше попереднього. Отже, $d=180$, послідовність, арифметична прогресія.

Відповідь: $d=180$.

Задача №5

Дано квадрат зі стороною 4 см. Середини його сторін є вершинами другого квадрату. Середини сторін другого квадрату є вершинами третього квадрату і т. д. довести, що послідовність площ

III. Розкриття теми лекції за планом

1. Мислення людини здійснюється у визначених логічних формах. Основними формами мислення можна назвати поняття, судження, умовивід і доведення.

Поняття – це форма мислення, що відображає предмет і явища в їх загальних і суттєвих ознаках. Наприклад, «дотична до кола».

При вивченні понять їм дають означення. Наприклад, «Паралелограмом називається чотирикутник, протилежні сторони якого паралельні». Спочатку вказується більш широке родове поняття, а потім та властивість, яка виділяє необхідний нам часний випадок.

Судженням – називається форма мислення, в якій що-небудь стверджується чи заперечується про предмети, їх ознаки чи про відношення між предметами.

Наприклад, дотична проведена до кола має одну спільну точку з колом.

Умовивід – форма мислення, за допомогою якої з одного двох чи декількох суджень виводиться нове судження, що містить у собі нове знання.

Наприклад, центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.

Доведення – форма мислення, за допомогою якої істинність якої-небудь думки обґрунтовується за допомогою інших думок, істинність яких доведено практикою. Будь-яке судження складається з ланцюжка висловлень, що

слідують одне за одним за певними правилами. Вміння розмірковувати, правильно обгрунтовувати свої висновки необхідне людям будь-якої професії.

Основні типи суджень та умовивідів розглядає класична логіка, створена давньогрецьким філософом Арістотелем (384 – 322 р. до н.е.).

Форма мислення вважається правильною, якщо за умови істинності вихідних тверджень вона завжди приводить до істинних висновків. Звісно, що якщо хибні вихідні твердження, то правильне за формою мислення може привести до хибного висновку.

Наприклад. 1. Всі ссавці мають шлунок. Леви – ссавці, отже всі леви мають шлунок.

Мати «шлунок» - суттєва властивість всіх ссавців, а отже і левів. Мислення побудовано правильно. Загальна форма такого мислення називається силогізмом.

2. Всі птахи мають два крила. Орли також мають два крила, отже орли – птахи. Наявність крил не є суттєвою ознакою: є риби, які мають крила, але все таки не являються птахами.

Форма міркування побудована неправильно, хоч і вихідні данні істинні. Одержаний висновок істинний.

Переконаємось, що така форма міркування може привести до абсурдного висновку, ще на більш виразному прикладі: всі негри чорноволосі, японці також чорноволосі, отже японці – негри.

Запишемо формулу n-перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = (2a_1 + (n - 1)d)n/2$$

$$120 = (2 + (n - 1)1)n/2$$

$$240 = n_2 + n - 240 = 0$$

$n = 15$ або $n = -16$ не задовольняє умові задачі оскільки n – натуральне число.

Отже, рядів 15.

Маємо 30 рядів.

$$S_{30} = (a_1 + a_{30})n/2$$

$$a_{30} = 1 + 29 = 30$$

$$S_{30} = (1 + 30)*30/2 = 465$$

465 куль розміститься у 30 рядках

Відповідь: 15; 465.

На практиці таке розміщення предметів зустрічається при складанні деревини.

Задача №3

При збереженні деревини лісу для будівництва чи столярних робіт їх складають так: в основі, наприклад, 12 колод, далі 11, 10 і т. д. Скільки колод в одній кладці?

Розв'язок

Якщо так складають колоди, то за таких умов ми можемо записати арифметичну прогресію.

$$a_1=12; d=-1; a_n=1$$

$a_n=a_1+(n-1)*d$ -формула n-ого члена арифметичної прогресії

$$1=12+(n-1)*(-1)$$

$$n=12+1-1$$

Задача № 1

Знайти площу нижньої основи бетонної колони висотою 3м, коли відомо, що площа верхньої основи колони дорівнює 16 дм^2 , а площа перерізу, розміщеного на 2 м нижче, становить $16,29 \text{ дм}^2$.

Розглянемо перерізи колони через кожний метр висоти. Тоді перший член геометричної прогресії $a_1 = 16$, а третій – $a_3 = 16,29$. Потрібно знайти четвертий член прогресії. Оскільки $a_3 = a_1 q^2$, то

$$q = \sqrt{a_3/a_1}, \quad q = \sqrt{16,29/16} \approx 1,009.$$

Тоді

$$a_4 = a_3 q \approx 16,29 \cdot 1,009 \approx 16,44 (\text{дм}^2).$$

Отже, площа нижньої основи дорівнює $16,44 \text{ дм}^2$.

Відповідь: $16,44 \text{ дм}^2$

Задача №2

Кулі розміщені у формі трикутника так, що в першому ряді 1 куля, у другому- 2, у третьому-3 і т.д. У скільки рядів розміщено кулі, якщо всього їх 120?

Розв'язок

Зрозуміло, що тут утворюється арифметична прогресія:

$$a_1=1, a_2=2, a_3=3, S_n=120 \quad n - \text{кількість рядів}$$

3.Математична (або символічна) логіка

– це розділ класичної логіки, у якому вивчають закономірності логічних обґрунтувань. Думка про можливість логічного обґрунтування певної теорії у вигляді деякого числення була сформульована ще в працях Арістотеля. Але в сучасному розумінні математична логіка – нова наука. Вона виникла лише в ХІХ столітті, хоч перші її ідеї належать Лейбніцу. Творцями ж сучасної математичної логіки слід вважати англійського математика Дж. Буля і шотландського – А. де Моргана, німецьких математиків Г.Фреге і Е.Шредера, російського математика П.С.Порецького та ін.

В математичній логіці висловленням називають будь-яке розповідне речення про яке можна сказати, істинне воно чи хибне.

Приклади висловлень: «2007 – просте число», «38 – кратне 2».

Висловленнями є, зокрема, теореми та різні гіпотези, тоді як означення до висловлень не відносяться. Не є висловленнями і речення типу: «Із святом!», «Чи є число 7 простим?» тощо.

Правила, за якими перетворюються висловлення, нагадують правила перетворення алгебраїчних виразів. Згадаємо, наприклад властивість транзитивності для нерівностей, якщо $a < b$, $b < c$, то $a < c$. З подібною формою міркування ми зустрінемося і при операціях над висловленнями.

Правила перетворення висловлень складають частину математичної логіки.

Висловлення: «Всі квадрати є прямокутниками, а всі прямокутники є паралелограмами, отже всі квадрати є паралелограмами» - є істинним.

Висловлення можуть виражатися не тільки за допомогою слів, але і за допомогою різних символів: $3+2=5$ – істинне висловлення, $-7 < -8$ – хибне, H_2SO_4 – кислота є істинним висловленням.

4. Логічні операції.

Якщо А деяке висловлення, то стверджуючи, що воно хибне, ми одержимо нове висловлення, яке називають запереченням висловлення А і позначають \bar{A} . Символ \bar{A} читають: «не – А».

Якщо А – висловлення «Ріка Лопань є притокою річки Дніпро», його запереченням \bar{A} є висловлення «Неправильно, що річка Лопань є притокою Дніпра». А – хибне висловлювання, \bar{A} - істинне.

Нехай А і В – два простих висловлення. Якщо ми з'єднаємо їх союзом і – одержимо нове висловлення, яке називають кон'юнкцією даних висловлень. Позначають $A \wedge B$. Цей запис читають: А і В.

Наприклад, розв'язати систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} 2\bar{d} + 3\bar{o} = 5 \\ 3\bar{d} + 5\bar{o} = -2. \end{cases}$$
 Це значить знайти

висловлення, що є кон'юнкцією двох висловлень, а саме $(2x + 3y = 5) \wedge (3x - 5y = -2)$.

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі. Будівництво, архітектура, геометрія.

***Учениця 9-Б класу
Анісімова О.В.***

Геометрична прогресія в будівельній справі.

Усі ми знаємо, що в архітектурі, будівельній справі широко використовуються колони. Виявляється, вони мають форму не циліндра, як здається на перший погляд, а зрізаного конуса.

Будівельники знають, що сила тиску в горизонтальних шарах будівельної колони зростає у напрямку до нижньої основи. Для збереження рівномірності напруги від тиску вздовж усієї довжини колони потрібно збільшувати площі її поперечних перерізів. Встановлено, що площі поперечних перерізів, рівновіддалених один від одного, становлять геометричну прогресію.

Враховуючи таку закономірність, колони будують не тільки красивими, а й міцними та надійними.

Оскільки площі поперечних перерізів колони збільшуються у напрямку до її основи, то колона не може мати форму циліндра.

щоденну плату на 1 крб. Ти ж будеш подавати милостиню: першого дня 1 коп., другого – 2 коп, тр – 4 і т.д. збільшуючи щодня милостиню вдвічі.” Багатій з радістю на це згодився, вважаючи умови вигіднішими. Скільки грошей одержав багатій?

Розв’язання:

Бідняк виплатив багачу 105 крб.

Оскільки 1,2,3... 14 – арифметична прогресія і її сума – це є виплата багачу

$$S_{14} = (1 + 14)14/2 = 105$$

Кошти, які повинен платити багач зростали за законом геометричної прогресії ($b_1 = 1, q = 2$)

і тому

$$S_{14} = 1(2^{14} - 1)/(2 - 1) = 16383$$

$$16383 \text{ коп} = 1638 \text{ крб. } 83 \text{ коп.}$$

Отже, багатій не лише не отримував зиску від цієї угоди, а змушений був доплатити бідняку 58 крб. 83 коп.

Відповідь: 105 крб; 58 крб. 83 коп.

За означенням кон’юнкція двох висловлень істинна тоді і тільки тоді, коли істинні обидва висловлення.

Нехай висловлення $A - 3 < 8$, висловлення $B - 8 < 11$ істинні висловлення, тоді їх кон’юнкція $A \wedge B - 3 < 8 < 11$ також істинне висловлення.

Висловлення $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$ рівносильне кон’юнкції висловлень

$$(x - 3)^2 = 0 \text{ і } (y + 4)^2 = 0.$$

Розглянемо властивості кон’юнкції.

1. $A \wedge B = B \wedge A$ властивість комутативності.

2. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ властивість асоціативності.

Дані властивості справедливі за умови істинності A, B, C .

Наприклад, висловлення $A - 12$ кратно 4, $B - 12$ кратно 3, тоді їх кон’юнкція $A \wedge B - 12$ кратно 4 і 3 та $B \wedge A - 12$ кратно 4 і 3.

Диз’юнкція – це логічна операція, що виражається в з’єднанні двох і більше висловлень за допомогою сполучників: «чи», «або», «чи те ...чи те» і інших.

Позначають $A \vee B$, читають: « A або B ». Символ \vee походить від першої букви латинського слова «ve», яке означає «або».

Наприклад, нехай висловлення $A - 10 > 7$, висловлення $B - 10 = 7$ їх диз’юнкція $A \vee B - 10 \geq 7$.

Рівняння $(x^2 - 3)(y + 4) = 0$ рівносильне сукупності $\begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$. Якщо висловлення А - $x^2 - 3 = 0$, а висловлення В - $y + 4 = 0$, то їх диз'юнкція і є даною сукупністю.

Диз'юнкція хибна тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення, з яких вона утворена, хибні, в усіх інших випадках диз'юнкція істинна.

Наприклад, дана функція або парна, або непарна, або загального виду.

Звернемо увагу на деяку особливість вживання сполуки «або» в логіці.

В повсякденному житті сполука «або» вживається в двох смислах: як розділова і єднально-розділова. Наприклад, учень Петров А. міркує так: «Завтра в 15 годин дня я буду в ліцеї або на стадіоні». Але неможливо бути і в ліцеї і на стадіоні одночасно в 15 годин. Сполука «або» розуміється як розділова.

Інший приклад. «Підвищення продуктивності праці можна досягти або впровадженням сучасної технології, або оптимальною організацією праці, або високим рівнем інтелектуального потенціалу працівників». Як бачимо, в даному випадку підставою підвищення продуктивності праці виступає кожен елемент одночасно, хоча може і кожен окремо, якщо виключити два з тих, що залишилися. Судження подібного типу в логіці називаються єднально-розділовими.

Відповідь: 407 місць

Задача 6

Годинник

Настінний годинник з “зозулю” зроблений так, що “зозуля” кує по одному разу, коли годинник показує половину чергового часу і кожного часу-стільки раз, який є час від 1 до 12. Скільки разів прокує “зозуля” за добу?

Розв'язання:

Нехай за першу годину „зозуля” прокує – 2 р, тоді за другу $(2 + 1) = 3$ р. За третю $3 + 1 = 4$ р.

Маємо арифметичну прогресію:

$a_1 = 2$ $d = 1$. Необхідно знайти a_{12}

$a_{12} = a_1 + (12 - 1)d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_{12} = 2 + 11 = 13$

Тоді сума всіх членів арифметичної прогресії

$S_{12} = (a_1 + a_{12})12/2 = (a_1 + a_{12})6$

$S_{12} = (2 + 13)6 = 90$ (раз)

За добу $90 \cdot 2 = 180$ раз

Відповідь: 180 раз.

Задача 7

Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на два тижні на таких умовах: „За це я тобі першого дня заплачу 1 карбованець, др – 2, трет – 3 і т.д. збільшуючи

перший цвях дай мені усього -1/4 коп., за другим-1/2 коп., за третім-1 коп. і так далі. ”Покупець зваблений низькою ціною і бажанням отримати коня прийняв умову продавця, розраховуючи, що за цвяхи доведеться заплатити не більше 10крб. На яку суму продавець проторгував?

Розв’язання:

За 24 підкованих цвяха довелося заплатити:

$$1/4 + 1/2 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{24-3}$$

Ця сума дорівнює:

$$\frac{2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303 \frac{3}{4} \text{ коп.}$$

Відповідь: близько 42 тисяч рублів

Задача 5

Цирк

Для глядачів циркових вистав крісла в одному із секторів розставлені так, що кожен слідує ряд містить на одне місце більше, ніж попередній. Скільки міст установлено в секторі, якщо в першому ряду 8 крісел, а всього рядів 22?

Розв’язання:

$$a_1 = 8; d = 1$$

$$a_{22} = 8 + 21d = 8 + 21 = 29$$

$$S_{22} = \frac{8 + 29}{2} \cdot 22 = 407 \text{ місць}$$

Для диз’юнкції, так як і для кон’юнкції можна вказати ряд рівносильностей.

1. $A \vee B = B \vee A$ комутативна властивість.

2. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ асоціативна властивість.

Операції кон’юнкції, диз’юнкції та заперечення пов’язані слідуєчими співвідношеннями:

$$a) A \wedge B = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$б) A \vee B = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

Ці співвідношення називають формулами де Моргана і читаються так: «Заперечення кон’юнкції рівносильне диз’юнкції заперечень; заперечення диз’юнкції рівносильне кон’юнкції заперечень»

Де Морган (1806-1871) – шотландський математик.

Переконаємося в справедливості даних співвідношень на конкретних прикладах. Так, якщо A – висловлення «Я граю в шахи», а B – висловлення «Я граю в шашки», то висловлення «Неправильно, що я граю в шахи або в шашки» відповідає формулі $\bar{A} \vee \bar{B}$. Висловлення $\bar{A} \wedge \bar{B}$ – «Я не граю в шахи і я не граю в шашки».

Народний фольклор багатий такими повчальними приказками:

«Ліс рубають – тріски летять»;

«Люди пишуть - час стирає»;

«Наречена іде до іншого – невідомо, кому повезло» та інші.

Ці судження легко записати за формою «якщо ..., то ...».

«Якщо люди пишуть, то час стирає»;

«Якщо ліс рубають, то тріски летять» і т.д.

Висловлення «Якщо А, то В» називаються умовними або імплікацією висловлень А і В.

Записують $A \Rightarrow B$. З висловлення А випливає висловлення В. Таким чином задається логічне слідування. Висловлення А – називається умовою, В – заключенням.

На відміну від кон'юнктивних і диз'юнктивних висловлень у імплікативних висловленнях закон комутативності категорично не застосовується, а це значить, що міняти місцями А і В не можна, тому що це приведе до логічних помилок.

Наприклад, маємо висловлення «Якщо підвищується сонячна активність, то відсоток летальності в людей із серцево-судинними захворюваннями значно зростає». Якби ми ми провели операцію комутативності, то вийшла б парадоксальна ситуація – «сердечники» обумовлювали б сонячну активність. Ці висловлення асиметричні.

Висловлення еквівалентності (рівносильності) – це складне висловлення, що істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення, що входять у нього або істинні, або хибні.

Розв'язання:

Нехай останній член бригади працював x годин, тоді перший працював $11x$ годин. Далі, що кількість риючих канаву було y , то загальна кількість годин праці обчислюється як сума у членів спадної прогресії. Перший член якої $11x$, а останній x , тобто:

$$\frac{(11x + x)y}{2} = 6xy$$

З іншого боку, відомо, що бригада з y людей, працюючи у повному складі, вирили b за 24 години, тобто для виконання роботи необхідно було $24y$ робочих годин, звідси випливає, що $bxy = 4y$. Число y не може дорівнювати нулю; на цей множник рівність скоротиться, після чого отримаємо:

$$bx = 24 \text{ і } x = 4$$

Відповідь: Член бригади, почав працювати останнім, працював 4 години.

Задача 4

Покупка коня

Дехто продав коня за 156 крб. Але покупець, купуючи коня, передумав його брати і повернув його, кажучи продавцю: «Мені не вигідно купувати за цю ціну, кінь таких грошей не вартий.» Тоді продавець запропонував таку умову: «Якщо ти вважаєш, що ціна коня занадто висока, то купи тільки його підковні цвяхи, а коня отримаємо безкоштовно. Цвяхів у кожній підкові 6. За

Доля п'ятого..... $x+4y$

На основі умов задачі складемо наступні два рівняння

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100 \\ 7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y) \end{cases}$$

Після спрощення першого рівняння отримає вид:

$$x+2y=20$$

Друге:

$$11x=2y$$

Вирішив цю систему отримаємо:

$$x=1\frac{2}{3}, y=9\frac{1}{6}$$

Відповідь: значить хліб повинен бути поділен на наступні частини: $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$.

Задача 3

Бригада землекопів

Старшокласники зобов'язалися вирити на шкільній ділянці канаву і організували для цього бригаду землекопів. Якщо б бригада працювала у повному складі вона б впоралась за 24 години. Але в дійсності до роботи приступили спочатку один член бригади. Через деякий час приєднався другий; потім третій через такий самий час, четвертий і так до останнього. При підрахуванні з'ясувалося, що перший працював в 11 раз довше останнього. Скільки часу працював останній?

Наприклад, якщо і тільки якщо трикутник рівносторонній, то він і рівнокутний. Це висловлення і є рівносильним і записується так $A \Leftrightarrow B$, де висловлення А – трикутник рівносторонній, висловлення В – трикутник має рівні кути.

Висловлення рівносильності мають різні способи вираження: «А, якщо і тільки якщо В», «Якщо і тільки якщо А, то В», «Лише тільки», «Якщо А, то В і навпаки», «А, якщо В, і В, якщо А», «Для А необхідно і достатньо В». Ці сполуки позначають взаємообумовленність предметів, явищ реальності.

Наприклад, висловлення рівносильності «Якщо тіло нагріти, то воно збільшиться в обсязі, і навпаки», «Число 585 кратне 9 тоді і тільки тоді, коли сума цифр числа ділиться на 9».

Розв'язуючи рівняння або системи рівнянь, нерівності або їх системи, ми переходимо від одних висловлювальних форм до інших, які є або логічним наслідком попередніх, або рівносильні їм. Якщо під час розв'язування рівнянь чи нерівностей (або їх систем) ми дістали лише рівносильні висловлювання, то знайдені розв'язки є розв'язками заданого рівняння. Якщо ж хоча б в одному місці дістаємо висловлювальну форму, не рівносильну попередній, то серед знайдених розв'язків останнього рівняння (системи) можуть бути такі, які не є розв'язками даного рівняння (системи). Тоді перевіркою вилучаємо зайві розв'язки.

Приведемо приклад розв'язування системи рівнянь та його запису з використанням символу рівності:

$$\begin{cases} 2\delta + 3\phi = 5, \\ 3\delta - 5\phi = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\delta - 9\phi = -5, \\ 6\delta - 10\phi = -42; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19\phi = -57, \\ 6\delta - 10\phi = -42; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = 3, \\ 6\delta = -12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = 3, \\ \delta = -2. \end{cases}$$

IV. Підсумок уроку.

Підведемо підсумок уроку, продовжуючи слідуючі висловлення: (на екрані проектора записані висловлення у вигляді математичного диктанту або висловлення з пропусками)

1. Мислення людини здійснюється у визначених логічних формах таких як ...

2. Засновником класичної логіки є ...

3. В математичній логіці висловленням називають будь-яке речення про яке можна сказати, воно чи

4. Логічні операції: кон'юнкція,, заперечення,, рівносильність.

5. Символ \vee це знак, відповідає сполучі;

Символ \wedge це знак, відповідає сполучі;

Символ \Rightarrow це знак, може бути записаним за формою ;

Символ \Leftrightarrow це знак, може бути записаним за формою ;

другу-2 коп., за третю-4 коп. і так далі. За розрахунком воїн отримав усе винагородження, вартістю 655 руб. 35 коп.. Скільки ран було у воїна?

Розв'язання:

Складемо рівняння:

$$65535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x-1}$$

$$\text{або } 65535 = \frac{2^{x-1} * 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1$$

Звідси маємо: $65536 = 2^x$ і $x = 16$

Відповідь: воїн мав 16 ран

Задача 2

Старовинна прогресія

Сто мір хліба поділили між п'ятьма людьми так щоб другий отримав настільки ж більше першого, наскільки третій отримав більше другого, четвертий і п'ятий більше четвертого. Окрім цього двох перших повинні отримати, всім разів трьох останніх. Скільки треба дати кожному?

Розв'язання:

Очевидно, кількості хліба отримали учасники поділу, складають зростаючу арифметичну прогресію. Нехай перший її член x різниця y , тоді:

Доля першого..... x

Доля другого..... $x+y$

Доля третього..... $x+2y$

Доля четвертого... $x+3y$

Відповідь: 21 раз стрілок попав в середину.

Задача 6

Учень повинен пройти від столу вчителя до дверей по прямій лінії за таким законом :перший крок він робить 1 м, другий $1/2$ м, третій $1/4$ м і т.д. – так, що довжина наступного кроку в 2 рази менша за довжину попереднього чи дійде цей учень до дверей, якщо відстань від столу до дверей 3 м?

Розв'язання

$S=3$ м

$1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$

нескінченна геометрична прогресія, тобто $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$

Отже, учень не зможе дійти до дверей.

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі. Калейдоскоп задач.

*Учениця 9-Б класу
Коваль Д.В.*

Задача 1

Винагородження воїна. Службовому воїну видано винагородження за першу рану-1 коп., за

6.З'ясуйте чи істинні дані висловлення:

А) 12 – найменше число, яке ділиться на 3 і 4;

Б) якщо a, b – деякі дійсні числа і такі, що a ділиться на b , то $a > b$;

В) якщо p і q – довільні дійсні числа і $q > 0$, то корені рівняння

$x^2 + px + q = 0$ одного знаку. (всі висловлення хибні, оскільки, не існує найменшого числа, яке ділилося б на 3 і 4, тому що на ці числа діляться 12, 0,

-12, -24, ...; число -10 ділиться на 5, але звідси не випливає, що $-10 > 5$; висловлення (В) буде правильним лише при додатковій умові, що корені розглядуваного рівняння дійсні (контрприклад: відносно коренів рівняння

$x^2 + x + 1 = 0$ не можна сказати, що вони одного знаку, хоч $q = 1 > 0$).

V. Домашнє завдання

1.Вивчити теорію за конспектом;

2.Записати символічно та з'ясувати істинність висловлень:

А) 100 ділиться на 3 і 4;

Б) 100 ділиться на 3 або на 4;

В) або 100 ділиться на 3, або 100 ділиться на 4;

Г) якщо 100 ділиться на 3, то 100 ділиться на 4.

3. Записати висловлення: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$ та з'ясувати їх істинність, якщо A –

«функція f тригонометрична», B - «функція f періодична».

Вступ

Урок узагальнення та систематизації знань за темою «Арифметична та геометрична прогресії» був проведений у вигляді уроку-семінару.

На цьому уроці учні звітували про результати їхньої дослідницької, пошукової роботи. Мета роботи – знайти застосування теорії на практиці, причому, якщо спочатку пошук не мав чіткої спрямованості на конкретну галузь, то згодом, відчуючи широту застосування прогресій в повсякденному житті, учні змінювали мету своєї роботи і займалися не тільки пошуком практичних задач, а вели дослідницьку роботу, наприклад, застосування задач в економіці, будівництві, фізиці, техніці і так далі.

Результатом роботи кожного учня була підбірка та розв'язання прикладних задач за вибраним напрямком.

$n_1=57$ -не задовольняє умові задачі

$n_2=8$

Відповідь :8 год.

Задача 5

У змаганнях з стрільби за кожний промах у серії, з 25 пострілів стрілок одержав штрафні очки :за перший промах – одне, за кожний наступний – на 1 очко більше, ніж за попередній. Скільки раз попав в середину стрілок, що отримав 7 штрафних балів?

n – число промахів в серії з 25 пострілів

Розв'язання

Сума арифметичної прогресії задається формулою

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

$$7 = \frac{2 \cdot 1 + 0,5(n-1)}{2} n$$

$$0,5n^2 + 1,5n - 14 = 0$$

$$n^2 + 3n - 28 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} n_1 * n_2 = -28 \\ n_1 * n_2 = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_1 = 4 \\ n_2 = -7 \end{array} \text{ не задовольняє умові задачі}$$

Так як стрілок отримав 7 штрафних балів при $n_1=4$ отримаємо $7 \times 4 = 28$

Задача 4

Турист, коли підіймався в гору, у першу годину досяг висоти 800 м, а кожну наступну годину підіймався на висоту, на 25 м меншу, ніж за попередню. За скільки годин він буде на висоті 5700м?

Розв'язання

Ми маємо арифметичну прогресію

800, 800-25,....

$a_1=800$, $a_2=800-25$

$a_1+a_2+\dots+a_n=5700$

$d=-25$

Сума арифметичної прогресії задана формулою

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

a_n -член знаходимо за формулою

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 5700$$
$$\frac{1600 + 25(n-1)}{2} \cdot n = 5700$$

$$25n^2 - 1575n - 11400 = 0 \quad | :25$$

$$n^2 - 63n + 456 = 0$$

$$D = 2401$$

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі. Техніка.

Учень 9-Б класу
Костюков О.І.

Велике значення в машинобудуванні має геометрична прогресія, наприклад в вимірювальній техніці розглядають послідовності довжин, площин, допусків, посадок та інше. Вони в багатьох випадках задовольняють законам геометричної прогресії.

У верстатобудуванні всі ступінчаті шківів для ремінних передач побудовували таким чином, що діаметр кожної послідовної ступені (в мм) більше діаметра попередньої на одне і те ж саме число, постійне для даного шківів.

В техніці таку геометричну послідовність називають геометричним або нормальним рядом. Таблиці нормальних рядів складені за законами геометричних прогресій. Всього розглядають 4 таких ряди, коли перший член дорівнює 1, а знаменник відповідно дорівнює:

$$R_{40} = \sqrt[40]{10} \approx 1.06 \qquad R_{20} = \sqrt[20]{10} \approx 1.12$$
$$R_{10} = \sqrt[10]{10} \approx 1.26 \qquad R_5 = \sqrt[5]{10} \approx 1.6$$

Приклади задач

Задача №1

Поперечно-строгальний верстат має шість різних подовжині 1 ходів повзуна з $l_1 = 150(\text{мм})$ і $l_2 = 650(\text{мм})$. Знайти всі останні довжини ходів повзуна, якщо відомо, що вони є членами арифметичної прогресії.

- на строгальному верстаті знімають стружку, і доводять деталь до потрібних розмірів із достатньою точністю.

Розв'язання

$$l_1 = 150 (\text{мм})$$

$$l_2 = 650 (\text{мм})$$

$$d = l_2 - l_1 = 650 - 150 = 500 (\text{мм})$$

$$l_3 = l_1 + (n - 1)d = 150 + 500 \cdot 2 = 1150 (\text{мм})$$

$$l_4 = l_1 + 3 \cdot d = 1150 + 3 \cdot 500 = 1650 (\text{мм})$$

$$l_5 = 150 + 4 \cdot 500 = 2150 (\text{мм})$$

$$l_6 = 150 + 5 \cdot 500 = 2650 (\text{мм})$$

Отже, знайдено 4 невідомих різних розмірів ходів повзуна.

Відповідь: $l_3 = 1150 (\text{мм})$; $l_4 = 1650 (\text{мм})$; $l_5 = 2150 (\text{мм})$; $l_6 = 2650 (\text{мм})$;

даси 1 к., другого дня за 100000 крб. – 2 к. і так кожного дня будеш збільшувати винагороду в 2 р., якщо ти зацікавився цією угодою, то з завтрашнього дня і почнемо. "Купець зрадів такій нагоді розбагатіти. Він підрахував, що за 30 днів отримує від незнайомця 3000000 крб. Наступного дня пішли вони до нотаріуса і підписали угоду. Хто в цій угоді програв: купець чи незнайомець?

Розв'язання

Ми маємо геометричну прогресію

1,2,3,4.....

$$b_1 = 1 \text{ к}$$

$$q = 2$$

кількість членів 30

Використовуємо формулу суми геометричної прогресії

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{30} = \frac{1(2^{30} - 1)}{2 - 1} = 1073741823 \text{ коп} = 10737418 \text{ крб } 23 \text{ коп}$$

Отже, за 30 днів багатий купець получить $10000 \times 30 = 3000000$ крб, а віддасть 10737418 крб 23 коп.

Відповідь: 10737418 крб. 23 коп.

Розв'язання

Ціна коня – 156 крб.

у коня 4 підкови на кожній 6 цвяхів тобто усього буде 24 цвяхи ($4 \cdot 6 = 24$)

маємо геометричну прогресію $1/4, 1/2, 1, \dots$

b_1 -цвях- $1/4$

b_2 -цвях- $1/2$

$q=2$

у прогресії 24 члена

Використовуємо формулу для знаходження суми геометричної прогресії

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{24} = \frac{1/4(2^{24} - 1)}{2 - 1} = 4194303,75 \text{ к}$$

Отже, за цвяхи треба заплатити 41943 крб.

Відповідь : 41943 крб

Задача 3

Незнайомець і багатий купець

Одного разу незнайомець постукав у вікно до багатого купця і запропонував таку угоду: "Я буду кожного дня протягом 30 днів приносити тобі по 100000 крб. А ти мені першого дня за 100000 крб.

Задача №2

Маємо 4 шків для визначення швидкості обертання шпинделя токарного верстата. Знайти діаметр кожного шків, якщо діаметр найменшого шків 120 мм, а найбільшого 240 мм.

- шків і привідний ремінь використовується для передачі обертання, від двигуна до станку, і для зміни числа оборотів.

Розв'язання

D – діаметр шків.

$$D_1 = D_4 + 3d$$

$$D_1 = 240$$

$$D_4 = 120$$

$$3d = 240 - 120 / : 3$$

$$d = 40$$

$$D_2 = 200(240 - 40 \cdot 1)$$

$$D_3 = 240 - 40 \cdot 2 = 160 \text{ (мм)}$$

Отже, знайдено 2 невідомих шків, які розташовані між 1 і 4 шків.

Відповідь: $D_2 = 240 \text{ (мм)}$; $D_3 = 160 \text{ (мм)}$.

Задача №3

Число обертів за 1 хв. шести шестерень, що використовуються для настроювання, утворюють геометричну прогресію, знаменник якої 1,12. Визначити число обертів кожної із шестерень, якщо перша з них робить найменшу кількість обертів – 30 об/хв.

- шестерень – це зубчате колесо, яке зуб'ями чіпаються й передають йому обертання.

Розв'язання

$$q = 1,12 \quad b_1 = 30 \text{ об/хв}$$

$$b_2 = 30 \cdot 1,12 = 33,6$$

$$b_3 = 30 \cdot q^2 = 30 \cdot 1,2544 = 37,632$$

$$b_4 = 1,404928 \cdot 30 = 1,404928 \cdot 30 = 42$$

$$b_5 = 1,573519 \cdot 30 = 48$$

$$b_6 = 1,762341 \cdot 30 = 54$$

Отже: число обертів 33,6; 37,632; 42; 48; 54.

Відповідь: 33,6 об; 37,632 об; 42 об; 48 об; 54 об.

Задача №4

Розрахувати геометричний ряд чисел, який стандартизує швидкість обертання шпінделя

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \cdot X_2 = -90 \\ X_1 + X_2 = -13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = -18 \\ X_2 = 5 \end{array} \text{ – не задовольняє умові задачі}$$

Отже, 1 синові було 5 років

2 синові – 8 років

3 синові – 11 років

4 синові – 14 років

5 синові – 17 років

Відповідь : 5, 8, 11, 14, 17 років

Задача 2

Купівля коня

Задача Магницького

Купець продав коня за 156 крб. Але покупець, придбавши коня, передумав купувати і повернув його, кажучи :

- Нема мені користі купувати за цю ціну коня, який таких грошей не вартий. Тоді купець запропонував інші умови:
- Якщо по-твоєму ціна за коня дуже висока, то купи лише її підковні цвяхи, коня одержиш безкоштовно в додаток. Цвяхів у кожній підкові 6. За перший цвях дай мені всього $1/4$ к., а за другий $1/2$ к, за третій 1к і т.д.

Покупець, спокусившись низькою ціною і бажаючи безкоштовно отримати коня, прийняв умови купця, думаючи, що за цвяхи доведеться заплатити не більше 10 крб. На скільки покупець проторгувався?

$$S_1 = \frac{2 \cdot 5 + (X-4) \cdot (X-4)}{2} = \frac{(5+X) \cdot (X-4)}{2}$$

$$S_2 = \frac{(8+X)(X-1)}{2}$$

$$S_3 = \frac{(11+X)(X+2)}{2}$$

$$S_4 = \frac{(14+X)(X+5)}{2}$$

$$S_5 = \frac{(17+X)(X+8)}{2}$$

$$\frac{S_1+S_2+S_3+S_4+S_5}{2} = 325$$

$$\frac{(5+X)(X-4) + (8+X)(X-1) + (11+X)(X+2) + (14+X)(X+5) + (17+X)(X+8)}{2} = 325$$

$$\frac{5X-20+X^2-4X+8X-8+X^2+X+22+11X+X^2+2X+14X+70+X^2+5X+136+17X+X^2+8}{2} = 325 \quad | \cdot 2$$

$$65X+5X^2-450=0 \quad | :5$$

$$X^2+13X-90=0$$

За теоремою Вієта маємо:

токарного верстату, якщо відомо, що відомо найменша кількість обертів шпинделя за хвилину 10, а знаменник прогресії 1,25(знайти 5 членів ряду)

Розв'язання

У геометричній прогресії, яка відображує швидкість обертання шпинделя токарного верстата прийемо перший член за a_1 , а далі знаючи знаменник прогресії, знайдемо інші швидкості.

$$b_1 = 10; \quad q = 1.25;$$

$$b_2 = 10 \cdot 1.25 = 12.5$$

$$b_3 = 10 \cdot 1.25^2 = 15.6$$

$$b_4 = 10 \cdot 1.25^3 = 19.53$$

$$b_5 = 10 \cdot 1.25 = 24.4$$

Отже: геометричний ряд, що стандартизує швидкість обертання шпинделя токарного верстата: $b_2=12.5$; $b_3=15.6$; $b_4=19.53$; $b_5=24.4$

Відповідь: 12.5 об; 15.6 об; 19.53 об; 24.4 об.

Задача №5

Потужності п'яти електромоторів складають зростаючу геометричну прогресію. Потужність першого 5 кВт, а третього 7,9 кВт. Розрахувати потужності останніх електромоторів.

Розв'язання

М – потужність електромотору. Потужність електромоторів складають зростаючу геометричну прогресію, де M_1, M_2 – третій члени прогресії.

$$q^2 = M_3/M_1 = 7.9/5 = 1.58$$

$$q = \sqrt{1.58} = 1.256$$

$$M_2 = 5 * 1.256 = 6.28$$

$$M_4 = 7.9 * 1.256 = 9.92$$

$$M_5 = 9.92 * 1.256 = 12.45$$

Отже: потужність електромоторів другого 6,28 кВт, четвертого 9,92 кВт п'ятого 12,45кВт.

Відповідь: 6.28; 9.92; 12.45.

Задача 6

Розрахувати проміжкові діаметри шківів, якщо на загальний вал необхідно насадити п'ять шківів і діаметри крайніх дорівнюють 110 мм і 206 мм (діаметри складають геометричну прогресію).

арифметичної прогресії доведена Діфантом, сума членів геометричної прогресії дана в книзі Евкліда "Початок" і на Русі у шкільному обіході відомості про прогресії з'явилися більш двохсот років назад у підручнику Магницького.

Задача 1

Батько дарує кожному з своїх синів у день його народження, починаючи з п'яти років, стільки книжок, скільки синові років. Вік п'ятих синів складає арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює 3. Скільки років було кожному синові, коли їх бібліотека нараховувала 325 книг?

Розв'язання

Нехай 1 синові – X років, тоді 2 синові – (X+3) років, 3 синові – (X+6) років, 4 синові – (X+9)

5 синові – (X+12) років

Книги, що батько дарував складемо в арифметичну прогресію

5, 6, 7, 8, 9,...

$$a_1=5 \quad d=1$$

$$n_1= X-4(n=X-4)$$

$$n_2=X-1$$

$$n_3=X+2$$

$$n_4=X+5$$

$$n_5=X+8$$

Використовуємо формулу для знаходження суми арифметичної прогресії

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \times n$$

$$n_2 = 1; \quad n_2 = 10.$$

Отже, може бути 1 кільце, але не вигідно, бо премія за 1 кільце також 100 грн., тому вигідніше, щоб було встановлено 10 кілець.

Відповідь: 10 кілець.

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі. Історичні задачі.

**Учениця 9-Б класу
Євсєєва О.А.**

Задачі, створені на основі арифметичної та геометричної прогресії, були і залишаються доброю нагодою випробувати кмітливість та гнучкість розуму.

Перші уявлення про арифметичну і геометричну прогресії були ще у вавилонських табличках і єгипетських папірусах. Самий древній папірус – Ринда (2000 років до нашої ери).

Окремі факти про арифметичну і геометричну прогресії знали китайські та індійські вчені. Про це говорить індійська легенда про винахідника шах.

Термін "прогресія" (від лат. progressio, що означає "рух вперед") був введений римським автором Боецієм та розумівся як без кінцева числова послідовність. Формула суми

Розв'язання

У цій геометричній прогресії розв'язок виконується аналогічно п'ятій і шостій задачам.

$$a_1 = 110 \text{ мм} \quad a_5 = 206 \text{ мм}$$

$$q^4 = 206 \div 110 \approx 1,9$$

$$q = \sqrt[4]{1,9} \quad q = 1,17$$

$$a_2 \approx 129 \quad a_3 \approx 151 \quad a_4 \approx 176$$

Відповідь : 129 мм ; 151 мм ; 176 мм.

Задача 7

Знайти проміжкові діаметри валів , якщо відомо, що діаметр найменшого валу 100 мм, а четвертого за порядком 201,6 мм. (діаметри складають геометричну прогресію)

Розв'язання

Знаючи що перед нами геометрична прогресія , ми можемо знайти знаменник прогресії , а потім інші члени прогресії.

$$a_1 = 100, \quad a_4 = 201,6$$

$$q^3 = 201,6/100 = 2,016, \quad q = \sqrt[3]{2,016} \approx 1,26, \quad a_2 = 126, \quad a_3 = 161,28.$$

Знаючи перший та останній члени прогресії, ми знайшли проміжкові члени.

Відповідь: 126 мм ; 161,28 мм.

Задача 8

Кутова швидкість шпинделя токарного верстата між 9 і 288 обертами за хвилину.

Обчислити решту можливих кутових швидкостей обертання шпинделя, коли відомо, що можна одержати ще чотири кутові швидкості.

Розв'язання

Між числами 9 і 288 треба розмістити чотири члени геометричної прогресії. Використаємо формулу $a_n = a_1 q^{n-1}$, одержимо:

$288 = 9q^5$, звідки $q=2$. Оскільки $a_1=9$, то $a_2 = a_1 \cdot q = 18$ (об/хв)

$a_3 = 36$ (об/хв), $a_4 = 72$ (об/хв), $a_5 = 144$ (об/хв)

Отже використавши властивості геометричної прогресії ми розв'язали задачу.

Відповідь: 18 об/хв, 36 об/хв, 72 об/хв, 144 об/хв.

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі. Економіка.

*Учень 9-Б класу
Бєлакопитовас Р.В.*

Задача 1

Отряд механізаторів весною, в час посівної роботи, в перший день зорав 100 га пашні, а за

$$a_2 = 50 + 50, \quad d = 50$$

Це арифметична прогресія

$$a_{20} = 50 + 19 \cdot 50 = 1000$$

Отже, на кінець двадцятої хвилини швидкість поїзда

$$1000 \text{ м/хв} = 60 \text{ км/год.}$$

Відповідь: 60 км/год.

Задача 9.

За виготовлення на установку залізобетонного кільця заплатили 100 грн., а за кожне слідує на 20 грн. більше ніж за попереднє. Крім того, по закінченню роботи було заплачено ще 100 грн. Підрахували середню вартість виготовлення та установки одного кільця. Вона стала 200 грн. Скільки кілець було встановлено?

Розв'язання:

Перше кільце коштувало 100 грн., далі 120 грн., 140 грн.... Маємо арифметичну прогресію: $a_1 = 100$ грн. $d = 20$.

Вартість виготовлення установки n – кілець знайдемо за формулою:

$$S_n = (2 a_1 + (n - 1)d)n/2$$

$$S_n = (2 \cdot 100 + (n - 1) \cdot 20) \cdot n/2 = (200 + 20n - 20)n/2 = (180 + 20n)n/2 = 2(90 + 10n)n = 10n^2 + 90n$$

$(10n^2 + 90n + 100)$ грн – виплата з премією

$$(10n^2 + 90n + 100)/n = 200$$

$$10n^2 + 90n + 100 - 200n = 0$$

$$10n^2 - 110n + 100 = 0$$

$$n^2 - 11n + 10 = 0$$

Задача 7.

Знайти відстань, яку пройде тіло при вільному падінні:

а) за сьому секунду після початку падіння;

б) за сім секунд після початку падіння.

Розв'язання:

Ми знаємо, що при вільному падінні тіло проходить за першу секунду 4,9 м, а за кожну наступну на 9,8 м більше.

Утворюється арифметична прогресія.

Необхідно знайти сьомий член цієї прогресії.

$(a_n): a_1 = 4.9 \text{ м } d = 9.8 \text{ м}$

а) $a_7 = a_1 + 6d$

$a_7 = 4.9 + 6 \cdot 9.8 = 63.7(\text{м})$

Отже, за сьому секунду після початку падіння тіло пройде 63,7 м.

За сім секунд – це сума відстаней.

$S_7 = (a_1 + a_7) \cdot 7/2$

$S_7 = (4.9 + 63.7) \cdot 7/2 = 240.1(\text{м}).$

За сім секунд тіло упаде на 240,1 м.

Відповідь: а) 63,7 м б) 240,1 м.

Задача 8.

Поїзд, відійшовши від станції, рівномірно збільшував швидкість на 50 м за хвилину. Якою стала швидкість поїзда в кінці 20-ої хвилини?

Розв'язання:

Нехай a_1 – швидкість на першій хвилині руху.

$a_1 = 50.$

кожний наступний день – на 3 га більше, ніж за попередній. Знайти, скільки га пашні отряд механізаторів зорав за 19 днів.

Рішення

Нехай 100 га – (скільки отряд зорав за 1 день) – це a_1 ;

За кожні наступні дні отряд зорав на 3 га більше – це – d . Прогресія арифметична. Знайти, скільки га отряд зорав за 19 днів – це S_{19}

$$S_{19} = \frac{200 + (19 - 1) d}{2}$$

$$S_{19} = \frac{200 + 18 \cdot 3}{2} = 2413$$

Отже, за 19 днів отряд зорав 2413 га пашні

Відповідь: 2413 га

Задача 2

За виготовлення і установку першого залізобетонного кільця криниці заплатили 100 грн, а за кожне наступне кільце платили на 20 грн більше, ніж за попереднє. На побудову криниці використано 9 кілець. Скільки заплатили за побудову криниці?

Рішення

100 грн за виготовлення першого залізобетонного кільця, це – a_1 ;

За кожне наступне кільце платили на 20 грн більше, це – d

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9) 9}{2}$$

$$a_9 = a_1 + (9 - 1) d$$

$$a_9 = 100 + 160$$

$$a_9 = 260$$

$$\frac{(100 + 260) 9}{2} = 16,20$$

Отже, за побудову криниці заплатили 1620 грн
Відповідь: 1620 грн.

Задача 3

За те, що вириють криницю, фермер виплачує за перший метр глибини 150 грн, а за кожні наступні – на 100 грн більше, ніж за попередні. Обчислити, скільки грн. фермер заплатить робітникам за криницю, глибина якої 10 м?

Рішення

За перший m фермер заплатив 150 грн, це a_1 , а за наступні на 100 грн більше, це S_{10} – вартість побудови криниці

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1) d}{2}$$

$$S_9 = \frac{300 + (10 - 1) 100}{2}$$

Отже; фермер сплатив 6000 грн
Відповідь: 6000 грн

Якщо сторони прямокутного трикутника пропорційні числам 3, 4, 5, то вони утворюють арифметичну прогресію.

Відповідь: тільки якщо вони пропорційні числам 3,4,5.

Задача 6.

Після кожного руху поршня розріджувального насоса з посудини видаляється 20 % повітря, яке міститься в ній. Визначимо тиск повітря в середині посудини після шести рухів у поршні, якщо початковий тиск був 760 мм.рт.ст.

Розв'язання:

Оскільки після кожного руху поршня з посудини видаляється 20 % наявного в ній повітря, то залишиться в ній 80 % повітря. Щоб визначити тиск повітря в посудині після чергового руху поршня, треба тиск повітря після попереднього руху поршня помножити на 0,8. Число, яке визначає тиск повітря в посудині (у мм. рт.ст) після шести рухів поршня, є сьомим членом цієї прогресії $b_7 = 760(0.8)^6$

$$b_7 = 200$$

Отже, після шести рухів поршня тиск в посудині 200 мм. рт .ст.

Відповідь: 200

$$194 = 2 \cdot 44 + (n - 1) \cdot 3 \cdot n / 2$$

$$194 = (88 + 3n - 3) \cdot n / 2$$

$$194 = (88 + 3n - 3)n$$

$$388 = 85n + 3n^2$$

$$3n^2 + 85n - 388 = 0.$$

$$D = 11881; \quad \sqrt{D} = 109$$

$n_1 = 4$ або $n_2 = 32,3$ - не з натуральним числом.

Отже, кількість сторін многокутника становить 4.

Відповідь: 4.

Задача 5.

Цікаво, чи утворюють сторони прямокутного трикутника арифметичну прогресію

Розв'язання:

Нехай a , b , c – сторони прямокутного трикутника, a і b – катети, c – гіпотенуза. Припустимо, що сторони утворюють арифметичну прогресію і $a_1 = a$, $a_2 = b = a_1 + d$, $a_3 = c = a_1 + 2d$

Тоді за теоремою Піфагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(a_1 + 2d)^2 = a_1^2 + (a_1 + d)^2$$

$$a_1^2 + 4d^2 + 4a_1d = a_1^2 + a_1^2 + 2a_1d + d^2$$

$$a_1^2 - 2a_1d + d^2 - 4d^2 = 0$$

$$(a_1 - d)^2 - (2d)^2 = 0$$

$$(a_1 - d - 2d)(a_1 - d + 2d) = 0$$

$$(a_1 - 3d)(a_1 + d) = 0$$

$$a_1 + d = a_2 = b$$

$$a_1 - 3d = 0$$

$$\text{Тоді } a_1 = 3d, b = 4d, c = 5d$$

Задача 4

На іподромі найгірший кінь коштує 400 грн, а найкращий 5500 грн. Ціна від одного до другого збільшується на 300 грн. Скільки усього було коней, та скільки вони коштують усі разом

Рішення

Ціна найкращого коня – a_1

найкращий 5 500 грн – a_1

різниця цін від одного до другого – d , $d = 300$,

прогресія арифметична.

кількість коней – n

ціна усіх коней разом – S_n

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$5\,500 = 400 + (n - 1) 300$$

$$5\,500 - 400 = 300n - 300$$

$$5\,400 = 300n$$

$$n = 18$$

$$S_{18} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot 18}{2}$$

$$S_{18} = \frac{(4\,000 + 5\,500) \cdot 18}{2}$$

Отже: Усього коней було 18. Коней іподром зможе продати за 53 100 грн

Відповідь: 18 коней, 53100 грн.

Задача 5

У автосалоні продається 10 автомобілів. Найдорожчий з них – десятий. П'ята машина коштує 7 000\$, а сьома – 9 000\$. Скільки коштують усі

машини разом? (Відомо, що ціна змінюється за законом арифметичної прогресії.)

Рішення

Нехай вартість п'ятої машини – a_5

сьомої – a_7

вартість усіх машин – S_{10}

$$a_7 = a_5 + 2d$$

$$9\,000 = 7\,000 + 2d$$

$$9\,000 - 7\,000 = 2d$$

$$d = 1\,000$$

$$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot 1\,000$$

$$7\,000 = a_1 + 4\,000$$

$$a_1 = 3\,000$$

$$S_{10} = \frac{2a_1 + (10 - 1)d}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(6\,000 + (10 - 1) \cdot 1\,000) \cdot 10}{2} = 75\,000 \$$$

Отже: Усі машини коштують 75 000\$

Відповідь: 75 000\$

Задача 6

Облицювання першого поверху багатоповерхового будинку коштує 1 000 грн, а кожного наступного на 60 грн дорожче від попереднього. Скільки коштує облицювання 10 поверху?

Рішення

$$a_1 = 1\,000 \text{ грн}$$

$$d = 60 \text{ грн}$$

$$S_{10} = ?$$

Задача 3.

Приклад з рослинного світу. Одна головка мака містить 3000 зернин. Якщо було б достатньо родючої землі; кожне зернятко, що упало, дало б росток, і майбутнім літом виросло б 3000 маків. Ціле макове поле. Яка кількість маків буде на п'ятий рік.

Розв'язання:

$$b_1 = 3000, \quad q = 3000, \quad b_5 = 3000 \cdot 3000^4 = 3000^5 = 243 \cdot 10^{15}$$

Поверхня всієї землі $135 \cdot 10^{12}$ кв.м. Якщо б всі зернятка мака проросли, потомство однієї рослини вже через п'ять років покрило всю земну кулю по дві тисячі на кожному квадратному метрі.

Задача 4.

Периметр многокутника дорівнює 194 см. Причому довжина його сторін становить арифметичну прогресію, різниця якої 3 см. Найменша сторона многокутника дорівнює 44 см. Скільки сторін у многокутнику?

Розв'язання:

З умови задачі ми знаємо, що довжина сторін многокутника утворюють арифметичну прогресію:

$$a_1 = 44; \quad d = 3;$$

$S_n = 194$ – це периметр многокутника.

За формулою суми n - перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = 2a_1 + (n - 1)d \cdot n/2$$

| | | | |
|--------|-------|--------|---------|
| Омега | 51200 | 10240 | 40960 |
| Оріон | 40960 | 8192 | 32768 |
| Персей | 32768 | 6553,6 | 26214,4 |

Обчислимо сумарний об'єм кредитів. Кредити банків утворюють геометричну прогресію

$b_1 = 80000$. $q = 1 - p$, де $p = p_0 / 100$; $p_0 = 20 \%$.

$p = 20 / 100 = 0,2$.

$q = 1 - 0,2 = 0,8$

$S_6 = 80000 + 80000 \cdot 0,8 + 80000 \cdot 0,8^2 + \dots + 80000 \cdot 0,8^5$

Використовуючи формулу суми n – членів геометричної прогресії

$S_n = b_1 \cdot (q^n - 1) / (q - 1)$

$S_6 = 205142,4$ грн.

Задача 2.

В банк внесена сума 5000 грн. Скільки грошей буде на рахунку вкладника через 2 роки, якщо банк виплачує 20 % в півріччя і відсотки нараховуються до попередньої частини.

Розв'язання:

По закінченню півріччя вклад буде складати 1,2 від початкової суми $q = 1,2$

$5000 \cdot 1,2^4 = 10361$

Отже: вклад буде складати 10368 грн.

Відповідь: 10368 грн.

$$S_{10} = \frac{(2a_1 + (10 - 1) d) \cdot n}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(2 \cdot 1000 + (10 - 1) 60) \cdot 10}{2} = 12700$$

Отже: Облицьовування 10 поверху коштує 12700 грн

Відповідь: 12700 грн

Задача 7

Це було майже сто років тому, селянин продавав 20 овець, за 200к. Коли покупець став надто довго торгуватись, селянин запропонував:

- Дай за першу вівцю 1к, а за другу – 2к, за третю – 4к, і далі за кожну вівцю вдвічі більше копійок, ніж за попередню.

Покупець погодився. Скільки він заплатив за тих овець?

Рішення

Маємо геометричну прогресію:

$b_1 = 1$; $q = 2$

$n = 20$; $S_{20} = ?$

$$S_{20} = \frac{b_1 (q^{20} - 1)}{q - 1}$$

$$S_{20} = \frac{1 (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 10485,75 \text{ грн}$$

Отже: Покупець заплатив 10485,75 к = 10485,75 грн

Відповідь: 10485,75 грн

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі.

Фінанси. Різні задачі.

Учениця 9-Б класу
Глоба А.І.



Існує думка, що разом з винаходом колеса, створення банків стало одним з найважливіших винаходів людства. Перший банк був створений у Венеції у 1171 р. З того часу банківська система розширюється й вдосконалюється. Комерційні банки виконують дві основні функції:

1. зберігають грошові вклади
2. надають кредити (позики)

Я поставила собі за мету знайти застосування прогресії в банківській справі. Познайомилась з підрахунком складних відсотків. Але спочатку цікава задача.

Задача 1

Задача 1

Одно пшеничное зерно
Всего одно, всего одно!
Нашел случайно Робинзон,
И был безмерно счастлив он.
Он землю тщательно взрыхлил,
Зерно удачи посадил,
Не раз полил, огородил
Был труд его упорен.

Ті, хто поміщає гроші в банк, фінансист називає вкладниками, а самі вклади – депозитами.

Національним банком установлюється, що якась частина вкладів в банк повинна бути в резерві банку у вигляді готівкою їх називають обов'язковим резервом банку. Останні гроші можна давати в кредит під цілком визначені проценти.

Отже, обов'язкова частина вкладів комерційних банків переводять в Національний банк України, а ті що залишилися, їх називають вільним резервом йдуть на позики, кредити. Розглянемо задачу.

Задача 1.

Банк Бета одержав вклад у розмірі 80000 грн. Виконує тіж операції: 20% переказує в центральний банк, а вільні резерви в розмірі 64000 грн. дає в кредит позивачу У. Банк Альфа отримав вклад в 100000 грн., а разом з банком Бета вони видали кредитів на суму $80000 + 64000 = 144000$ грн.

Розв'язання:

| Назва банку | Розмір нового вкладу | Обов'язкові резерви | Вільні резерви |
|-------------|----------------------|---------------------|----------------|
| Альфа | 10000 | 20000 | 80000 |
| Бета | 80000 | 16000 | 64000 |
| Гамма | 64000 | 12800 | 51200 |

матеріалу, прочитаного за попередній день. Всього до іспиту студент готувався 4 дні. Підручник містить 369 сторінок. На скільки сторінок більше студент прочитав у перший день, ніж в останній?

ЗАДАЧА №10

У січні робітник заробив 720 гривень. У наступні місяці він отримував щомісячно на 140 гривень більше. За скільки місяців він отримав 6420 гривень?

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі. ***Фізика.***

Учениця 9-Б класу
Клименко

Цікава тема “як банки роблять гроші”. Здивована, що без геометричної прогресії не обійтись і в банківській справі.

Перші банкіри – ростовщики і міняли – з’явилися ще в стародавньому світі, а перші справжні банки були засновані в Венеції в 1171 році. Ділові люди звертаються до банку кожного разу, коли хочуть зберегти, накопити чи вкласти гроші в якусь справу.

Всходило солнце и луна
Взошел и колос из зерна.
А в нем 12 зерен.
На солнце колос загорел
И первый урожай созрел.
Увенчан труд упорный!
Мал урожай, почти смешон,
12 граммов весит он,
Но снова славный Робинзон
Сажает в землю зерна...
И снова каждое зерно по колосу рождает.
Дает на острове оно в год по два урожая...
Теперь попробуй подсчитай
(придется потрудиться!)
Какой по счету урожай даст 5 мешков пшеницы.
По 48 кг и сверх еще полпуда (8кг)
И на какой по счету год он урожай тот соберет?

Дано:

1. $b_1=1$
2. $q=12$
3. b_n -геометрична прогресія

Знайти: n .

Розв’язання:

знайдемо b_n , звівши кг в гр. Для цього
 $b_n=(48000*5)+8000=248000$ кг.

$n-1$

З формули випливає що $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Звідси $q = b_n / b_1$. Тому $12 = 248000$, це приблизно 12.

Робінзон збере 6 урожаїв за 3 роки.

Відповідь: 3 роки

Задача 2

В банк внесли вклад 1000 грн. з доходом 8% річних. Яку суму виплатить банк споживачу через 4 роки ?

Розв'язання:

Формула складних відсотків:

$A_n = A_0 \cdot (1 + p/100)^n$, де A_0 -початковий капітал,

p - величина банківського проценту,

n - кількість років,

4

тоді $A_n = 1000 \cdot (1 + 0.08) = 1360$ грн.

Отже 1360 грн. отримає споживач через 4 роки.

Відповідь: 1360 грн.

Задача 3

Говорять, що в 1723 р. гетьман Полуботок поклав до англійського банку великий капітал з України під 4% річних. У скільки разів збільшився б той капітал до наших днів?

Розв'язання :

Позначимо через a_1, a_2, a_3 відстань пройдену альпіністом. За умовою ці числа складають арифметичну прогресію з першим членом $a_1 = 200$ метрів, а різниця $-d = -20$ метрів. Необхідно знайти $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7$, тобто суму S_7 .

$$S_7 = (2a_1 + 6d) : 2 \cdot 7 = (200 - 60) \cdot 7 = 980 \text{ м}$$

ЗАДАЧА №7

Бригада робітників почала рити колодязь за умови, що за перший метр глибини вони отримають 40 гривень, а за кожний наступний – на 15 гривень більше, ніж за попередній. Яка глибина колодязя, якщо вони отримали 1690 гривень?

ЗАДАЧА №8

Чоловік взяв кредит в комерційному банку на n місяців за умови, що у перший місяць він вертає $1/n$ частину кредиту, а за кожен наступний місяць виплата збільшується на 5 гривень. Необхідно вернути 1995 гривень, а за останній місяць – 150 гривень. Скільки коштів він узяв спочатку?

ЗАДАЧА № 9

Готуючись до іспитів студент у перший день прочитав декілька сторінок підручника. У кожен наступний день студент читав 80 % від

ЗАДАЧА № 5

Дано паралелепіпед : його довжина 10 см, а висота 2,5 см. Висота, довжина і ширина утворюють арифметичну прогресію. Знайти об'єм паралепіпеда.

Розв'язання:

Відомо, що в паралепіпеді довжина дорівнює 10 см, а висота 2,5 см. Виміри цього паралепіпеду утворюють арифметичну прогресію. Приймаємо a_1 за висоту, тоді a_2 – це довжина. Необхідно знайти a_2 . Складемо і розв'яжемо рівняння :

$$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$d = (a_3 - a_1) / 2$$

$$d = 10 - 2,5 : 2 = 3,75$$

$$a_2 = 2,5 + 3,75 = 6,25$$

$$a_1 = 10 \text{ см}$$

$$a_2 = 6,25$$

$$a_3 = 2,5$$

$$V = 156,25 \text{ (см}^3\text{)}$$

ЗАДАЧА № 6

За першу годину альпініст піднявся на висоту 200 метрів над табором., а за кожну наступну годину піднімався на 20 метрів менше, ніж за попередню. На якій висоті він буде через 7 годин після початку піднімання?

Розв'язання:

З формули про складні відсотки випливає, що $A_n = A_0 \cdot (1 + p/100)^n$. С початку знаходимо різницю років: зараз 2006р. , а Полуботок поклав великий капітал з України до англійського банку у 1723р., то минуло 283 роки, бо $2006 - 1723 = 283$. Підставляємо відомі 283

до формули складних відсотків і отримаємо, що капітал збільшився б у 1,04, це приблизно 66135 раз.

Відповідь: збільшився б у 66135 разів.

Використовуючи формулу складних відсотків можна підрахувати і кількість населення.



Щороку населення Землі зростає приблизно на 2%. Скільки людей житиме у 2006 році якщо, у 1990 їх було 5,2 млрд. чоловік?

Розв'язання:

З формули про складні відсотки випливає що

$$A_n = A_0 \cdot (1 + p/100)^n$$

Знайдемо різницю років: $2006 - 1990 = 16$, тоді, підставивши данні у формулу складних відсотків, отримаємо, що у 2006 р. населення Землі складатиме: $5,2 \cdot 1,002 = 5,2 \cdot 1,428 = 7,4256$ млрд. чол.

У 2006 р. населення Землі сягатиме 7,4256 млрд. чоловік.

Відповідь: 7,4256 млрд. чоловік.



Задача 5

У цирку 20 рядів. В першому ряді 60 місць. В кожному наступному на 8 місць більше.

1. Скільки місць в останньому ряді?

Розв'язання:

З формули про n -ий член арифметичної прогресії випливає, що $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ в цьому разі $a_{20} = 60 + 8 \cdot 19 = 212$, якщо $n=20, a_1=60, d=8$.

Відповідь: в останньому ряді 212 місць.

2. Скільки всього місць в цирку?

Розв'язання:

З формули про суму членів арифметичної прогресії випливає, що: $S_n = a_1 + a_n / 2 \cdot n$, тоді $S_{20} = 60 + 212 / 2 \cdot 20 = 2720$ місць.

Відповідь: всього 2720 місць.

3. В середньому вартість білету у цирку 15 грн. Який прибуток одержить цирк після однієї вистави?

ЗАДАЧА №3

Деяка ламана складається з 12 ланок, довжина найбільшої дорівнює 25 см, а кожна наступна менше від попередньої на 2 см.

Знайти довжину найменшої ланки.

Розв'язання :

Довжини ланок утворюють арифметичну прогресію:

$$a_1 = 25; \quad d = -3 \quad \text{Тому}$$

$$a_{12} = a_1 + 11d; \quad a_{12} = 3.$$

3 см – найменша ланка.

Відповідь : 3 см.

ЗАДАЧА № 4

Дано п'ятикутник, в якого найкоротша сторона – 4 см, а найдовша – 12 см. Знайти периметр цього п'ятикутника. Відомо, що сторони цього п'ятикутника – члени арифметичної прогресії.

Розв'язання:

Ми маємо п'ятикутник, в якому найкоротша сторона дорівнює 4 см, а найдовша – 12 см. Тоді найкоротша сторона – це a_1 , а найдовша – a_5 . За умовами a_1 – 4 см, a_5 – 12 см. Периметр п'ятикутника буде сума всіх його сторін.

Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$S_5 = (a_1 + a_5) / 2 \cdot 5 \quad S_5 = (4 + 12) : 2 \cdot 5 + 40 \text{ см.}$$

Відповідь: 40 см.

Розв'язання :

- 1) Щоб порахувати, необхідно додати ряд чисел:
- 2) $1+2+4+8+16+32+\dots$
- 3) Не важко помітити особливість цих чисел:
- 4) $1=1$
- 5) $2=1+1$
- 6) $4=(1+2)+1$
- 7) $8=(1+2+4)+1$ і т. д. , тобто кожне число дорівнює попередньому разом з тим, плюс "1". Відомо, що в 30 день він сплатив 5368709 руб. 12 коп. Треба 5368709 руб. 12 коп додати до 5.368.709 руб. 13 коп., і отримаємо всю суму – 10737418 руб. 23 коп.

Відповідь : 10737418 руб. 23 коп.

ЗАДАЧА № 2

Спіла голівка маку дає 3000 зерен і з кожного може вирости рослина, в якій теж буде 3000 зерен. Кожного року виростає з одного маку 3000 рослин.

Скільки буде всього маків через 5 років?

Розв'язання:

Щоб знайти кількість маків, необхідно підрахувати суму

$$S_5 = B1 * (G^5 - 1) / (G - 1)$$

$$S_5 = 3000 * (3000^5 - 1) / 2999 = 243000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 243 * 10^{15} \text{ маків.}$$

Відповідь: $243 * 10^{15}$

Розв'язання:

Якщо всього місць у цирку 2720, а вартість білета в середньому 15 грн., то після першої вистави цирк отримає 40800 грн., бо $2720 * 15 = 40800$

Отже, після вистави цирк отримає прибуток у 408000 грн.

Відповідь: 40800 грн.

Задача 6

Робітникам , які копають криницю за перший метр платять 30 грн., а за кожний наступний – на 20 грн. більше ніж за попередній. Скільки вони зароблять, виробивши 12- метрову криницю?

Дано:

$$a1=30\text{грн.}$$

$$d=20\text{ грн.}$$

$$n=12$$

Розв'язання:

З формули про n-ний член випливає, що

$$an=a1+d*(n-1), \text{ тоді } a12=250, \text{ звідси}$$

$$S12=30+250/2*12=1680\text{ грн.}$$

Робітники зароблять 1680 грн.

Відповідь: 1680 грн.

Задача 7

Індійський шейх спитав мудреця, яку нагороду він хоче за винахід шахів. Мудрець відповів, що нехай шейх покладе 2 зерна на першу клітинку шахів, а на другу - 4. За кожен наступний збільшуючи кількість зерна в 2 рази. Шейх зрадів такій маленькій винагороді, але коли він підрахував кількість зерна, то він зрозумів що такої кількості зерна не зібрати на всій планеті. Яку кількість зерна побажав мудрець?

Розв'язання:

Маємо геометричну прогресію, де $b_1=2$, $q=2$. З формули про суму членів геометричної прогресії: $S_n = b_1 \cdot (q^n - 1) / (q - 1)$, звідси $S_{64} = 2 \cdot (2^{64} - 1) / (2 - 1) = 18446744073709551615$

Мудрець побажав дуже велику кількість зерна, яку за звичайних умов не підрахувати.

Відповідь: $2 \cdot (2^{64} - 1)$

Задача 8

Коли маленький Карл Гаус навчався у школі, то його вчитель з математики, щоб зацікавити розумника, запропонував підрахувати суму чисел від 1 до 100, сподіваючись що Гаус не виконає цю задачу, але хлопчик досить швидко впорався й назвав відповідь.

Як він рахував?

Розв'язання:

Великий математик Карл Гаус першим порахував цю суму за формулою суми n – перших членів арифметичної прогресії: $S_n = (a_1 + a_n) / 2 \cdot n$, звідси, якщо $a_1=1$ і $d=1$, то $S_{100} = 1 + 100 / 2 \cdot 100 = 5001$. Таку відповідь отримав Карл Гаус у підрахунках.

Арифметична та геометрична прогресії. Прикладні задачі. Геометрія.

Учениця 9-Б класу
Бовкун О.О.

ЗАДАЧА №1

Багатий – мільйонер повертався додому радісний: один незнайомец запропонував йому угоду: кожен день він приносить багатію по 100 000 руб., на протязі місяця, а багатий повинен за сотню віддавати 1 коп., за 2 – 2 коп, за 3- 4 коп., за 4- 8 коп і т. д., в кожен день вдвічі більше, ніж в попередній. Багатий щиро радів спочатку цій угоді, але виявилось, що насправді він сплатить більше, ніж отримає. Так, за 30- сотню тисяч він заплатив 5368709 руб. 12 коп., а за всі гроші – 10373418 руб. 23 коп. Але, як міг багатий заздалегідь визначити суму, яку він оплатить і не міг він визначити, що угода йому не вигідна.